ملف المتتاليات العددية

تدريبات و تمارين مقترحة مع الحلول

التحضير الجيّد للبكالوريا

BAC 2019

وفّقكم الله

كتابة الأستاذ :

بلقاسم عبد الرزاق

الموسم الدراسي : 2018 - 2019

تمارين في المتتاليات رقم 1 + 2

التمرين رقم 01 :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$.

يعطى المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

1) أ) باستعمال المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ، عيّن على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .

ب) أعط تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n-1>0$.

ب) برهن صحة التخمين المذكور في السؤال (1) - ب -

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) حسابية ، أساسها هو : $\dfrac{1}{3}$.

ب) عبّر بدلالة n عن كل من u_n وَ v_n .

ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 02 :

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2}{1+u_n}$.

1) برهن أنّ جميع حدود المتتالية (u_n) موجبة .

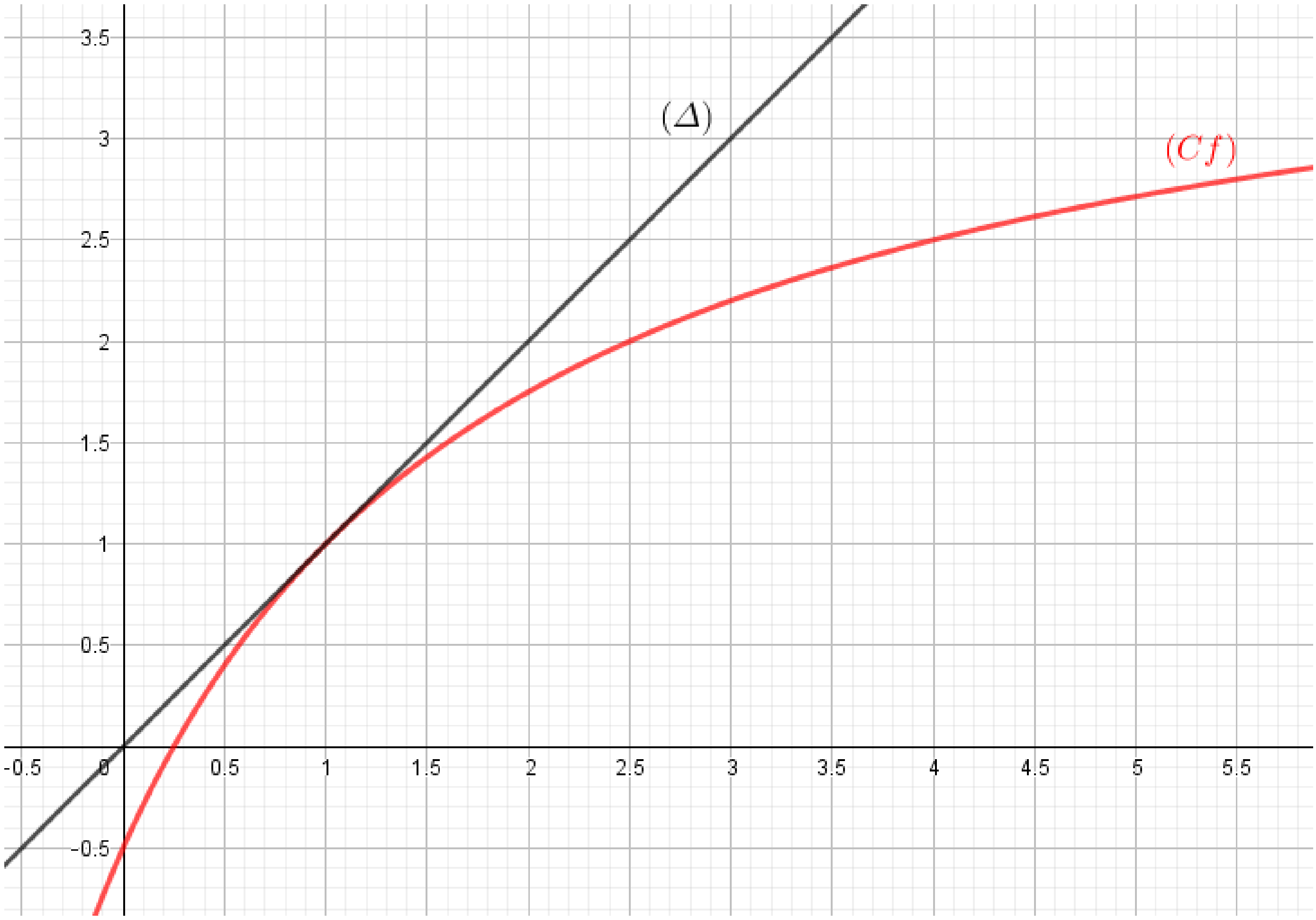
2) بيّن أنّه إن كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ نهايتها l تكون حلاً للمعادلة : $x^2+x-2=0$.

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

ب) برّر أنّ المتتالية (v_n) متقاربة ، ثمّ حدد نهايتها .

4) عبّر عن u_n بدلالة n ، ثمّ حدد نهاية المتتالية (u_n) .



(الوثيقة المرفقة بالتمرين رقم 01)

كتابة الأستاذ : ب . ع

تمارين في المتتاليات رقم 3 + 4

التمرين رقم 03 :

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$.

أ) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نمثّل المستقيم (d) ذو المعادلة : $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$.

❖ أنشئ على محور الفواصل الحدود الأربع الأولى للمتتالية (u_n) .

ب) بيّن أنّه إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ نهايتها l تكون تساوي : $\frac{23}{18}$.

ج) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n تكون : $u_n \geq \frac{23}{18}$.

د) أدرس رتابة المتتالية (u_n) ، ثمّ أعط نهايتها .

2) نعتبر n عدد طبيعي غير معدوم :

أ) برهن أنّ : $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + ... + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}(1 - \frac{1}{10^n})$.

ب) لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = 1,2\underbrace{777.....7}_{n}$.

بهذا يكون : $v_0 = 1,2$ ، $v_1 = 1,27$ ، $v_2 = 1,277$ ، .... و هكذا .

❖ باستعمال السؤال (أ) بيّن أنّ نهاية المتتالية (v_n) هي عدد ناطق r .

3) هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟ ، برّر إجابتك .

التمرين رقم 04 :

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b ، c التي تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية متزايدة حيث : $\begin{cases} a \times b \times c = 216 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 133 \end{cases}$

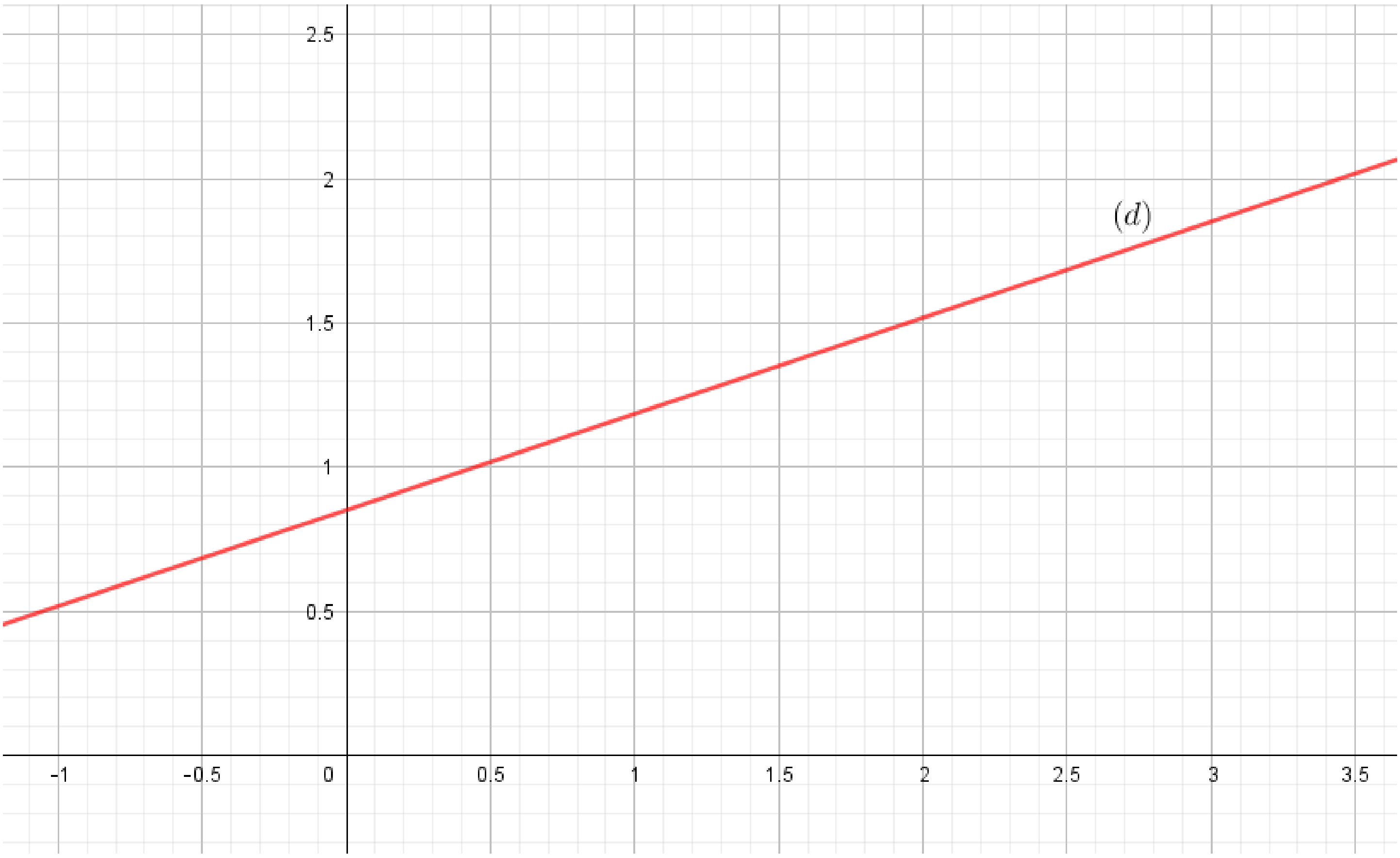
2) نعتبر المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \end{cases}$ وَ $v_n = u_n + \alpha$ ، $(\alpha \in \mathbb{R})$

أ) عيّن قيمة α حتّى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وَ حدّها الأوّل .

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n = 9 \times (\frac{2}{3})^n + 3$. ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟ .

3) ماهي طبيعة المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \ln(v_n)$ ؟ .

4) أحسب الجداء P_n حيث : $P_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times .... \times (u_n - 3)$.



(الوثيقة المرفقة بالتمرين رقم 03)

كتابة الأستاذ : ب . ع

تمارين في المتتاليات رقم 5 + 6 + 7

التمرين رقم 05 :

نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > n^2$.

❖) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

2) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) ما طبيعة المتتالية (w_n) .

ب) أحسب المجموع : $S_{n-1} = w_0 + w_1 + ... + w_{n-1}$

ج) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

التمرين رقم 06 :

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول حيث : $u_0 > 0$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 2}{u_n + 4}$

1) أ)عيّن العددين الحقيقيين a وَ b بحيث يكون : $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n + 4}$

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > 0$

2) عيّن u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

3) نفرض أنّ : $u_0 = 3$ ، وَ نضع : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + \alpha}$ ، حيث $(\alpha \in \mathbb{R})$.

❖) حدّد قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وَ حدها الأول v_0 .

❖) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n

4) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{1}{u_0 + 1} + \dfrac{1}{u_1 + 1} + ... + \dfrac{1}{u_n + 1}$.

التمرين رقم 07 :

(u_n) متتالية معرّفة بـ : $u_0 = e^3$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

1) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > e^2$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) . هل هي متقاربة ؟ .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n) - 2$.

❖) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

❖) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثمّ u_n بدلالة n . ماهي نهاية كل من المتتاليتين (v_n) وَ (u_n) ؟ .

4) أحسب بدلالة n الجداء P_n ، حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times .... \times u_n$.

كتابة الأستاذ : ب . ع

تمارين في المتتاليات رقم : 8 + 9

التمرين رقم 08 :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = (\dfrac{n+1}{2n})u_n \end{cases}$.

1) أحسب الحدود التالية : u_2 ، u_3 ، u_4 .

2) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $u_n > 0$.

ب) برهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة . ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n) ؟ .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تحديد أساسها و حدّها الأوّل v_1 .

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

4) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\left[1;+\infty\right[$ كما يلي : $f(x) = \ln x - x\ln(2)$.

أ) عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 09 :

لتكن المتتالية العددية (u_n) ذات الحدود غير المعدومة : $u_0 = 1$ ، $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

و من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1}^2 = 2u_{n+2} \times u_n$.

1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

❖ بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تحديد أساسها و حدّها الأوّل v_0 .

2) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1} = (\dfrac{1}{2})^{n+1} \times u_n$.

3) بيّن إذن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n = (\dfrac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

4) إستنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ حدد نهايتها .

كتابة الأستاذ : ب . ع

تمارين في المتتاليات : (15+14+13+12+11+10)

التمرين رقم 10 :

نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) بيّن أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون : $v_n > \frac{1}{2}$.

جـ) عيّن أصغر عدد طبيعي p ، بحيث : إذا كان : $n \geq p$ ، فإن : $v_n < \frac{3}{4}$.

د) إستنتج أنّه إذا كان : $n \geq p$ فإنه يكون : $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.

2) نضع من أجل $n \geq 5$: $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + ... + (\frac{3}{4})^{n-5}\right] \times u_5$.

جـ) إستنتج أنّه من أجل كل $n \geq 5$ يكون : $S_n \leq 4u_5$.

3) بيّن أنّ المتتالية $(S_n)_{n\geq5}$ متزايدة ، ثمّ استنتج أنها متقاربة .

التمرين رقم 11 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ ، و من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$.

1) لتكن المتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $s_n = u_{n+1} + u_n$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (s_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول .

ب) إستنتج عبارة s_n بدلالة n .

2) نضع : $v_n = (-1)^n \times u_n$ ، ونعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $t_n = v_{n+1} - v_n$.

❖ عبّر عن t_n بدلالة s_n .

3) عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n . (يمكن حساب المجموع : $t_0 + ... + t_{n-1}$ ، بطريقتين مختلفتين) .

❖) عيّن عندئذ النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{u_n}{8^n})$.

التمرين رقم 12 :

ليكن θ عدد حقيقي حيث : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على n كما يلي : $u_0 = 2\cos(\theta)$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

1) أحسب الحدود : u_1 ، u_2 وَ u_3 . (تذكر أنّ : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$).

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$.

3) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 13 :

نعرّف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$.

1) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

$u_{n+1} \leq 0,95 u_n$ ، إذا وافقط إذا كان : $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$.

2) نعتبر الدالة f المعرّفة على $[1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{10}$.

أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثم أحسب نهايتها عند $+\infty$.

ب) بيّن أنّه يوجد عدد وحيد α من المجال $[1;+\infty[$ بحيث : $f(\alpha) = 1,9$.

ج) عيّن العدد الطبيعي n_0 ، بحيث يكون : $n_0 - 1 < \alpha < n_0$.

د) برهن أنّه من أجل كل $n \geq 16$ ، يكون : $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$.

3) أ) عيّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) إبتداءا من الرتبة 16 .

ب) ماذا نستنتج بالنسبة لهذه المتتالية ؟ .

4) أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل $n \geq 16$ يكون : $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$.

ب) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 14 :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^{-x}+1}$.

ب) إستنتج أنّ الدالة f فردية .

2) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل من أجل كل x من $\mathbb{R}$ تكون : $f'(x) = -\frac{1}{2}(\frac{e^x-1}{e^x+1})^2$.

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

جـ) إستنتج أنّه من أجل كل $x \geq 0$ يكون : $1-\frac{2}{e^{x}+1} \leq \frac{1}{2}x$.

4) بيّن أنّ : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(1-\frac{1}{2}x)\right]=0$ ، ماذا تستنتج ؟ .

5) أنشئ المنحنى (C) .

الجزء الثاني :

نعرّف المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1} \end{cases}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل طبيعي n تكون : $u_n > 0$.

2) **من السؤال 3) ـ جـ) الجزء الأول** تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

❖) إستنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

3) بين أنّه من أجل كل طبيعي n يكون : $u_n \leq (\frac{1}{2})^n$.

❖) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين رقم 15 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=0$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$.

1) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

ج) عيّن النهاية l للمتتالية (u_n) .

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;\pi]$ يكون : $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\cos(\frac{x}{2})$.

ب) بيّن إذن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n=\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

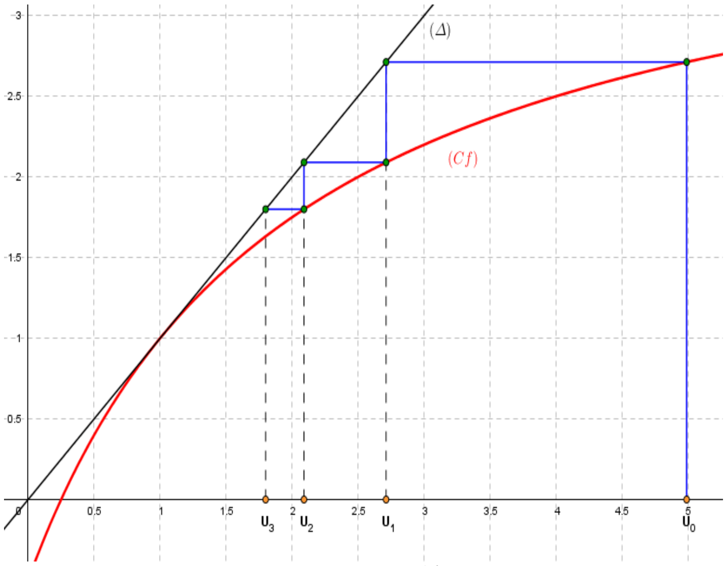
ج) جد ثانية النهاية l للمتتالية (u_n) .

كتابة الأستاذ : ب . ع

حلول تمارين المتتاليات

حل التمرين الأول :

1) أ) الإنشاء :



ب) التخمين : نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متناقصة و تقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) .

2) أ) البرهان بالتراجع : $u_n - 1 > 0$.

*) التحقق من أجل $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 5$ ، أي : $u_0 - 1 > 0$ ، إذن محققة .

*) نفرض أنّ : $u_n - 1 > 0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1} - 1 > 0$

لدينا فرضا : $u_n - 1 > 0$ أي : $u_n > 1$ ، و بما أنّ الدالة f متزايدة على $]-2;+\infty[$ فإنّ : $f(u_n) > f(1)$ ،

أي : $u_{n+1} > 1$ ، و منه : $u_{n+1} - 1 > 0$.

و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n > 1$.

ب) لنبرهن صحة التخمين :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{-(u_n^2 - 2u_n + 1)}{u_n + 2}$$

و منه : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0$.

و منه المتتالية (u_n) متناقصة ، و بما أنّها محدودة من الأسفل بـ 1 ، فهي متقاربة .

3)أ) لنحسب : v_{n+1}

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{1}{\dfrac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2}}$$

أي : $v_{n+1} = \dfrac{1}{\dfrac{3u_n - 3}{u_n + 2}} = \dfrac{u_n + 2}{3u_n - 3}$.

*) لنحسب الفرق : $v_{n+1} - v_n$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{3}{3(u_n - 1)}$$

أي : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \dfrac{1}{3}$.

إذن : $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{3}$.

و منه المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$ و حدها الأول :

$v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{4}$.

ب) *) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = \dfrac{1}{3}n + \dfrac{1}{4}$.

*) عبارة u_n بدلالة n : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ ، أي :

$u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n}$ ، أي : $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1$.

و منه : $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3}n + \dfrac{1}{4}} + 1$.

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{\dfrac{1}{3}n + \dfrac{1}{4}} + 1 \right] = 1$$

حل التمرين الثاني :

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$.

1) لنبرهن بالتراجع أنّ جميع حدود المتتالية (u_n) موجبة :

*) تحقق من أجل $n=0$: $u_0=3$ ، أي : $u_0>0$

و منه : محققة من أجل $n=0$.

*) لنفرض أنّ : $u_n>0$ و نثبت أنّ : $u_{n+1}>0$

لدينا : $u_n>0$ ، و منه : $\frac{2}{1+u_n}>0$ ، أي : $u_{n+1}>0$

*) و أخيرا من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n>0$

2) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

و بما أنّ : $u_{n+1}=\frac{2}{1+u_n}$ ، فإنّ : $l=\frac{2}{1+l}$ ، و منه :

$l^2+l-2=0$ ، أي أنّ l هو حل للمعادلة $x^2+x-2=0$

هذه الأخيرة تقبل حلين هما : $x_1=1$ و $x_2=-2$.

و عليه : نختار $l=1$ ، لأنّ حدود المتتالية (u_n) موجبة .

3) لدينا : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$.

أ) لنبرهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2}=\frac{\frac{1-u_n}{1+u_n}}{\frac{4+2u_n}{1+u_n}}$$

$$=\frac{1-u_n}{4+2u_n}=\frac{-(u_n-1)}{2(u_n+2)}=-\frac{1}{2}v_n$$

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=-\frac{1}{2}$ ،

و حدها الأول : $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2}=\frac{2}{5}$.

و منه : $v_n=\frac{2}{5}\times(-\frac{1}{2})^n$.

ب) بما أنّ الأساس q يحقّق : $-1<q<1$ ، إذن :

المتتالية (v_n) تتقارب نحو 0 .

4) عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$ ، أي : $v_nu_n+2v_n=u_n-1$

أي : $v_nu_n-u_n=-2v_n-1$ ، أي :

$u_n(v_n-1)=-2v_n-1$ ، أي : $u_n=\frac{-2v_n-1}{v_n-1}$

و منه : $u_n=\dfrac{-2\times\frac{2}{5}(-\frac{1}{2})^n-1}{\frac{2}{5}(-\frac{1}{2})^n-1}$.

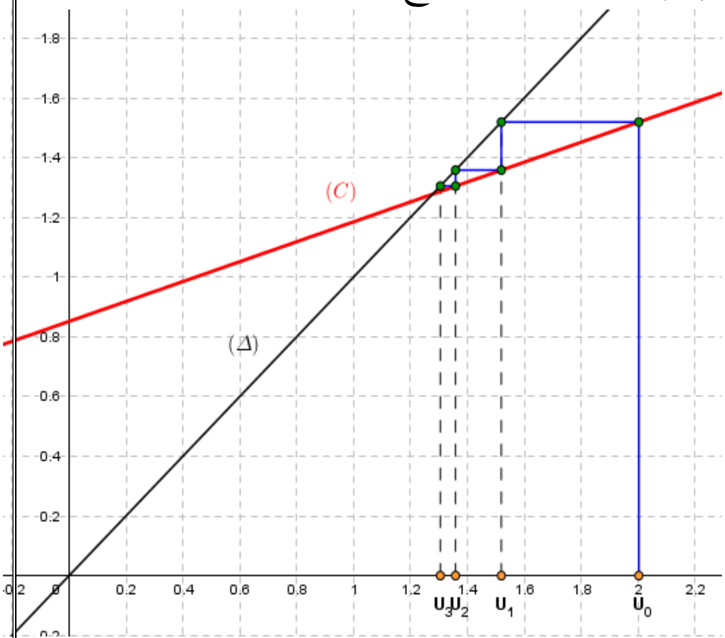
*) تحديد نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2})^n=0$.

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

حل التمرين الثالث :

1) أ) تمثيل الحدود الأربع الأولى للمتتالية (u_n) :



ب) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$.

و بما أنّ : $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{23}{27}$ ، فإنّ :

: أي ، $l=\frac{1}{3}l+\frac{23}{27}$: أي ، $l-\frac{1}{3}l=\frac{23}{27}$

. $l=\frac{23}{18}$: و منه ، $l=\frac{23}{27}\times\frac{3}{2}$: أي ، $\frac{2}{3}l=\frac{23}{27}$

ج) لنبرهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq\frac{23}{18}$

*) لنتحقق من أجل $n=0$: $u_0=2$ ، أي : $u_0\geq\frac{23}{18}$

*) لنفرض أنّ : $u_n\geq\frac{23}{18}$ و نثبت أنّ : $u_{n+1}\geq\frac{23}{18}$

لدينا فرضا : $u_n\geq\frac{23}{18}$ ، أي : $\frac{1}{3}u_n\geq\frac{23}{54}$ ، أي :

$\frac{1}{3}u_n+\frac{23}{27}\geq\frac{23}{54}+\frac{23}{27}$ ، أي : $u_{n+1}\geq\frac{23}{54}+\frac{46}{54}$

أي : $u_{n+1}\geq\frac{69}{54}$ ، و منه : $u_{n+1}\geq\frac{23}{18}$.

و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $u_n\geq\frac{23}{18}$.

د) لندرس رتابة المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}u_n+\frac{23}{27}-u_n=-\frac{2}{3}u_n+\frac{23}{27}$$

*)نعلم أنّ : $u_n\geq\frac{23}{18}$ ، أي : $-\frac{2}{3}u_n\leq-\frac{46}{54}$ ، أي :

$-\frac{2}{3}u_n\leq-\frac{23}{27}$ ، أي : $-\frac{2}{3}u_n+\frac{23}{27}\leq 0$ ،

و منه : $u_{n+1}-u_n\leq 0$.

إذن : المتتالية (u_n) متناقصة .

*) بما أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل فهي متقاربة

و نهايتها تساوي $\frac{23}{18}$.

2) أ) البرهان على المساواة :

نلاحظ أنّ : $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\dots+\frac{1}{10^{n+1}}$ هو

مجموع لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{10}$ و حدها الأول $\frac{1}{10^2}$ ،

عدد هذه الحدود هو : n حد . نسمي المجموع بـ : S_n .

$$S_n=\frac{1}{10^2}\times\frac{1-(\frac{1}{10})^n}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{10^2}\times\frac{10}{9}\left[1-(\frac{1}{10})^n\right]$$

و منه : $S_n=\frac{1}{90}\times(1-\frac{1}{10^n})$. و هو المطلوب .

ب) لدينا : $v_n=1,2\underbrace{77....7}_{n}$ ، أي :

$$v_n=1,2+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{7}{10^4}+....+\frac{7}{10^{n+1}}$$

$$=1,2+7(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+....+\frac{1}{10^{n+1}})$$

و منه : $=1,2+7\times\frac{1}{90}\times\left[1-(\frac{1}{10^n})\right]$

*) نعلم أنّ : $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{10})^n=0$ ، إذن :

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=(1,2+\frac{7}{90})=\frac{12}{10}+\frac{7}{90}=\frac{108+7}{90}$$

و منه : $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{115}{90}=\frac{23}{18}$ ، (عدد ناطق) .

3) المتتالية (u_n) متناقصة و المتتالية (v_n) متزايدة ،

و لهما نفس النهاية l ، إذن فهما متجاورتان .

حل التمرين الرابع :

1) لدينا : $\begin{cases}a\times b\times c=216\\a^2+b^2+c^2=133\end{cases}$ وَ بما أنّ الأعداد c,b,a

حدود متتابعة من متتالية هندسية فإنّ : $a\times c=b^2$

أي : $b\times b^2=216$ ، و منه : $b^3=216$ ،

أي : $b=6$. بالتعويض نجد : $\begin{cases}a\times c=36\\a^2+c^2=97\end{cases}$ ، أي :

$\begin{cases}c=\frac{36}{a}\\a^2+c^2=97\end{cases}$ ، أي : $a^2+(\frac{36}{a})^2=97$ ، أي :

$\frac{a^4+1296}{a^2}=97$ ، و منه : $a^4-97a^2+1296=0$

بوضع $X=a^2$ نجد : $X^2-97X+1296=0$ ،

أي : $\Delta = 4225$ ، ومنه : $\begin{cases} X_1 = 16 \\ X_2 = 81 \end{cases}$ ، أي :

$\begin{cases} a=4 \\ a=-4\end{cases}$ ، $\begin{cases} a=9 \\ a=-9\end{cases}$. إذن : $\begin{cases} a=9\\ b=6\\ c=4\end{cases}$ مرفوضة ،

$\begin{cases}a=-9\\b=6\\c=-4\end{cases}$ مرفوضة ، $\begin{cases}a=-4\\b=6\\a=-9\end{cases}$ مرفوضة ، $\begin{cases}a=4\\b=6\\c=9\end{cases}$ ص .

2) أ) تعيين قيمة α : لدينا $v_n = u_n+\alpha$ ، أي :

$v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha$ أي : $v_{n+1}=\frac{2}{3} u_n+1+\alpha$ ، أي :

$v_{n+1}=\frac{2}{3}(v_n-\alpha)+1+\alpha$ ، أي :

$v_{n+1}=\frac{2}{3} v_n+\frac{1}{3}\alpha+1$ ، إذن : (v_n) هندسية معناه :

$\frac{1}{3}\alpha+1=0$ ، أي : لما $\alpha=-3$ تكون المتتالية (v_n)

هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وَ حدها الأول $v_0=9$.

ب) أوّلا نعيّن عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0\times q^n$ ،

و منه : $v_n = 9\times(\frac{2}{3})^n$.

الآن نعيّن عبارة u_n بدلالة n : لدينا $u_n=v_n-\alpha$ ،

أي : $u_n=v_n+3$ ، ومنه : $u_n=9\times(\frac{2}{3})^n+3$

حساب نهاية (u_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ ، لأنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{3})^n=0$.

3) لدينا : $w_n=\ln(v_n)$ ، أي : $w_{n+1}=\ln(v_{n+1})$ ،

أي : $w_{n+1}=\ln(\frac{2}{3} v_n)$ ، أي :

$w_{n+1}=\ln(\frac{2}{3})+\ln(v_n)$ ، و منه :

$w_{n+1}=\ln(\frac{2}{3})+w_n$.

إذن : (w_n) متتالية حسابية أساسها $\ln(\frac{2}{3})$

وَ حدها الأول : $w_0=\ln(9)$.

4) حساب الجداء :

$P_n=(u_0-3)\times(u_1-3)\times....\times(u_n-3)$ ،

لدينا : $u_n-3=v_n$ ،

أي : $P_n=v_0\times v_1\times....\times v_n$ ، أي :

$P_n = v_0\times(v_0.q)\times(v_0.q^2)\times....\times(v_0.q^n)$ ، أي :

$P_n=(v_0\times v_0\times...\times v_0)(q\times q^2\times...\times q^n)$ ، و منه :

$P_n=v_0^{n+1}\times q^{\frac{(n+1)n}{2}}$ ، أي : $P_n=9^{n+1}\times(\frac{2}{3})^{\frac{n^2+n}{2}}$

حل التمرين الخامس :

لدينا : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=u_n+2n+3\end{cases}$.

1) لنبرهن بالتراجع أنّ : $u_n>n^2$.

*) لنتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $u_0>0^2$ ، و منه :

$1>0$ ، (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n>n^2$ ، و لنثبت أنّ : $u_{n+1}>(n+1)^2$

لدينا فرضا : $u_n>n^2$ ، أي : $u_n+2n+3>n^2+2n+3$

أي : $u_{n+1}>n^2+2n+1+2$ ، أي : $u_{n+1}>(n+1)^2+2$

و منه : $u_{n+1}>(n+1)^2$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $u_n>n^2$.

*) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

بما أنّ : $u_n>n^2$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2)=+\infty$.

بالمقارنة نستنتج أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n) :

$u_{n+1}-u_n=2n+3$ ، نلاحظ أنّ : $u_{n+1}-u_n>0$

و منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3) لدينا : $w_n=u_{n+1}-u_n$.

أ) طبيعة المتتالية (w_n) : لدينا : $w_n=2n+3$

أي : $w_{n+1}=2(n+1)+3$ ، أي : $w_{n+1}=2n+2+3$

أي : $w_{n+1}=2n+3+2$ ، و منه : $w_{n+1}=w_n+2$

إذن : المتتالية (w_n) حسابية أساسها 2 و حدها الأول 3 .

ب) حساب المجموع S_{n-1} :

$S_{n-1}=w_0+w_1+....+w_{n-1}$ ، أي :

$S_{n-1}=\dfrac{(w_0+w_{n-1})n}{2}=\dfrac{(3+2n+1)n}{2}$ ، أي :

$S_{n-1}=\dfrac{(2n+4)n}{2}=\dfrac{2(n+2)n}{2}=n^2+2n$.

ج) إستنتاج عبارة u_n :

لدينا : $w_n=u_{n+1}-u_n$ ، أي :

$\begin{cases} w_0=u_1-u_0 \\ w_1=u_2-u_1 \\ w_2=u_3-u_2 \\ \vdots \\ w_{n-1}=u_n-u_{n-1} \end{cases}$ بالجمع نجد : $S_{n-1}=u_n-u_0$ ،

أي : $u_n=S_{n-1}+u_0$ ، أي : $u_n=n^2+2n+1$

و منه : $u_n=(n+1)^2$.

*) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^2=+\infty$.

حل التمرين السادس :

لدينا : $u_0>0$ و $u_{n+1}=\dfrac{5u_n+2}{u_n+4}$.

1) أ) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$\dfrac{au_n+4a+b}{u_n+4}=a+\dfrac{b}{u_n+4}=u_{n+1}$ ، بالمطابقة نجد :

$\begin{cases} a=5 \\ 4a+b=2 \end{cases}$ ، و منه : $\begin{cases} a=5 \\ b=-18 \end{cases}$.

إذن : $u_{n+1}=5-\dfrac{18}{u_n+4}$.

ب) البرهان بالتراجع على أنّ : $u_n>0$.

*) لنتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $u_0>0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n>0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1}>0$.

لدينا : $u_n>0$ ، أي : $5u_n+2>0$ و أيضا : $u_n+4>0$

و منه : $\dfrac{5u_n+2}{u_n+4}>0$ ، أي : $u_{n+1}>0$ ، و هو المطلوب

*) و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $u_n>0$.

2) تعيين u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا كان : $u_0=u_n=u_{n+1}$ ،

أي : $u_0=\dfrac{5u_0+2}{u_0+4}$ ، أي : $u_0^2+4u_0=5u_0+2$

أي : $u_0^2-u_0-2=0$ ، و منه سيكون :

$u_0=-1$ (مرفوض) ، أو $u_0=2$ (مقبول) .

3) لدينا : $u_0=3$ و $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+\alpha}$.

*) تعيين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية :

لنحسب : v_{n+1} .

$$v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{5u_n+2}{u_n+4}-2}{\dfrac{5u_n+2}{u_n+4}+\alpha}=\dfrac{\dfrac{5u_n+2-2u_n-8}{u_n+4}}{\dfrac{u_n+2+\alpha u_n+4\alpha}{u_n+4}}$$

$$=\dfrac{3u_n-6}{5u_n+\alpha u_n+4\alpha+2}=\dfrac{3(u_n-2)}{(5+\alpha)u_n+4\alpha+2}$$

و منه : $v_{n+1}=\dfrac{3(u_n-2)}{(5+\alpha)\left[u_n+\dfrac{4\alpha+2}{5+\alpha}\right]}$.

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان :

$v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+\dfrac{4\alpha+2}{5+\alpha}}$ ، أي : $\dfrac{u_n-2}{u_n+\dfrac{4\alpha+2}{5+\alpha}}=\dfrac{u_n-2}{u_n+\alpha}$

بالمطابقة نجد : $\alpha=\dfrac{4\alpha+2}{5+\alpha}$ ، أي : $\alpha^2+5\alpha=4\alpha+2$

و منه : $\alpha^2+\alpha-2=0$ ، إذن سيكون :

$\alpha=-2$ أو $\alpha=1$.

*) حالة : $\alpha=-2$ يكون : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n-2}=1$ ،

هنا المتتالية (v_n) تصبح ثابتة ، إذن هذه حالة مرفوضة .

*) حالة : $\alpha = 1$: يكون $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

و يصبح : $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$.

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ و حدها الأول :

$\dfrac{1}{4} = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = v_0$.

*) عبارة v_n : $v_n = \dfrac{1}{4} \times (\dfrac{1}{2})^n$ و منه : $v_n = \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

*) عبارة u_n : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$ ، أي: $v_n u_n + v_n = u_n - 2$

أي : $v_n u_n - u_n = -v_n - 2$ ، أي : $u_n(v_n - 1) = -v_n - 2$

أي : $\dfrac{-\dfrac{1}{2^{n+2}} - 2}{\dfrac{1}{2^{n+2}} - 1} = \dfrac{-v_n - 2}{v_n - 1} = u_n$ ، أي :

$u_n = \dfrac{\dfrac{-1 - 2 \times 2^{n+2}}{2^{n+2}}}{\dfrac{1 - 2^{n+2}}{2^{n+2}}}$ ، و منه : $u_n = \dfrac{-1 - 2^{n+3}}{1 - 2^{n+2}}$

4) حساب المجموع S_n :

$S_n = \dfrac{1}{u_0 + 1} + \dfrac{1}{u_1 + 1} + ... + \dfrac{1}{u_n + 1}$.

لدينا : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1} = \dfrac{u_n + 1 - 3}{u_n + 1} = 1 - \dfrac{3}{u_n + 1}$ ،

و منه : $\dfrac{3}{u_n + 1} = 1 - v_n$ ، أي : $\dfrac{1}{u_n + 1} = \dfrac{1 - v_n}{3}$ ،

إذن : $S_n = \dfrac{1 - v_0}{3} + \dfrac{1 - v_1}{3} + ... + \dfrac{1 - v_n}{3}$ ،

أي : $S_n = \dfrac{\overbrace{(1 + 1 + ... + 1)}^{n} - (v_0 + v_1 + ... + v_n)}{3}$

أي : $S_n = \dfrac{(n+1) - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}}{3}$ ،

إذن : $S_n = \dfrac{n+1}{3} - \dfrac{\dfrac{1}{2} \times \left[1 - (\dfrac{1}{2})^{n+1}\right]}{3}$.

حل التمرين السابع :

لدينا : $u_0 = e^3$ و $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

1) إثبات أنّ : $u_n > e^2$ ، (نستعمل البرهان بالتراجع)

*) التحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$ ،

لدينا : $u_0 = e^3$ أي : $u_0 > e^2$ محقّقة .

*) نفرض صحة الخاصية عند n ، أي : $u_n > e^2$.

*) و نبرهن صحة الخاصية عند $n+1$ ، أي : $u_{n+1} > e^2$.

لدينا فرضا $u_n > e^2$ ، أي : $\sqrt{u_n} > e$ ،

أي : $e\sqrt{u_n} > e^2$ ، إذن : $u_{n+1} > e^2$. وهو المطلوب

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > e^2$.

2) إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) : أي نحسب :

$u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n$ ، أي :

$$u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n \times \frac{e\sqrt{u_n} + u_n}{e\sqrt{u_n} + u_n} = \frac{e^2 u_n - u_n^2}{e\sqrt{u_n} + u_n}$$

ومنه : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(e^2 - u_n)}{e\sqrt{u_n} + u_n}$.

*) بما أنّ : $u_n > e^2$ معناه : $e^2 - u_n < 0$ ، ومنه :

$u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

*) نعم المتتالية (u_n) متقاربة ، لأنّها متناقصة و محدودة من الأسفل بـ e^2 .

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n) - 2$

*) بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية : أي نحسب :

$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2$ ، أي: $v_{n+1} = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$

ومنه: $v_{n+1} = \ln e + \ln\sqrt{u_n} - 2$ ، أي

$v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2}\ln(u_n) - 2$ ، أي :

$v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(u_n) - 1$ ، ومنه :

2) $v_{n+1}=\frac{1}{2}(\ln(u_n)-2)$ ، إذن : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ ،

و عليه فإن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$.

وَ حدّها الأول : $v_0=\ln(u_0)-2$ ، أي :

$v_0=\ln(e^3)-2$ ، ومنه : $v_0=1$.

*) عبارة v_n : $v_n=v_0\times(q)^n$ ، أي : $v_n=(\frac{1}{2})^n$.

*)عبارة u_n : $v_n=\ln(u_n)-2$ ، أي : $\ln(u_n)=v_n+2$

أي : $u_n=e^{v_n+2}$ ، إذن : $u_n=e^{((\frac{1}{2})^n+2)}$.

*) حساب النهايات :

أ) نهاية المتتالية (v_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=0$ ، لأنّ : $-1<q<1$

ب) نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\lim_{n\to+\infty}e^{((\frac{1}{2})^n+2)}=e^2 .$$

4) حساب الجداء P_n : $P_n=u_0\times u_1\times....\times u_n$ ،

أي : $P_n=e^{(v_0+2)}\times e^{(v_1+2)}\times....\times e^{(v_n+2)}$ ، أي :

$P_n=e^{(v_0+v_1+...+v_n)}\times e^{(2+2+.....+2)}$ ، ومنه :

$P_n=e^{(S_n)}\times e^{2(n+1)}$.

*) حساب S_n : $S_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ، أي :

$S_n=1\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-(\frac{1}{2})}$ ، ومنه : $S_n=2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]$.

إذن : $P_n=e^{2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]}\times e^{2(n+1)}$ ،

أي : $P_n=e^{2\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]+2n+2}$. (بالإمكان التبسيط أكثر لـ P_n)

حل التمرين الثامن :

لدينا : $u_1=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$.

1) حساب الحدود :

*) $u_2=\frac{3}{4}u_1=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

*) $u_3=\frac{4}{6}u_2=\frac{4}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$.

*) $u_4=\frac{5}{8}u_3=\frac{5}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{32}$.

2) أ) لنبرهن بالتراجع على أنّ : $u_n>0$.

*) لنتحقق من أجل $n=1$ ، أي : $u_1>0$ ،

و منه : $\frac{1}{2}>0$ (محققة) .

*)لنفرض أنّ : $u_n>0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1}>0$.

لدينا فرضا أنّ : $u_n>0$ وَ بما أنّ : $\frac{n+1}{2n}>0$ ،

فسيكون : $\frac{n+1}{2n}u_n>0$ ، أي : $u_{n+1}>0$.

*) و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ يكون : $u_n>0$.

ب) لنبرهن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{2n}u_n-u_n=(\frac{n+1}{2n}-1)u_n$$
$$=\frac{n+1-2n}{2n}u_n=\frac{1-n}{2n}u_n$$

*) بما أنّ : $n\geq 1$ فإنّ : $1-n\leq 0$.

و منه : $u_{n+1}-u_n\leq 0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متناقصة .

*) بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل

بـ 0 ، فهي متقاربة .

3) لدينا : $v_n=\frac{u_n}{n}$.

أ) لنبرهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1}=\frac{n+1}{2n}\times\frac{1}{n+1}u_n$$

أي : $v_{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n}{n}$ ، و منه : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$.

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول :

$v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{2}$.

ب) *) عبارة v_n : $v_n=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1+1}}=\frac{1}{2^n}$

لدينا : $v_n = \frac{u_n}{n}$ ، أي : $u_n = n \times v_n$ ، أي :

$u_n = n \times \frac{1}{2^n}$ ، و منه : $u_n = \frac{n}{2^n}$. و هو المطلوب .

4) لدينا : $f(x) = \ln x - x\ln(2)$.

أ) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln x - x\ln(2)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{\ln x}{x} - \ln(2)\right] = -\infty$$

لأنّ : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

ب) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_n = \frac{n}{2^n}$ ، أي : $\ln u_n = \ln(\frac{n}{2^n})$ ، أي :

$\ln u_n = \ln n - \ln 2^n$ ، أي : $\ln u_n = \ln n - n\ln 2$

و منه : $\ln u_n = f(n)$.

*) بما أنّ : $\lim_{n \to +\infty} f(n) = -\infty$ ، إذن :

$\lim_{n \to +\infty} \ln u_n = -\infty$ ، و منه : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

حل التمرين التاسع :

لدينا : $u_0 = 1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1}^2 = 2u_{n+2} \times u_n$ ،

أي : $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{2u_n}$.

1) لدينا : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_{n+1}^2}{2u_n}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}^2}{2u_n} \times \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{2u_n} \text{ ،}$$

أي : $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ، و منه : $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول :

$v_0 = \frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$.

2) لنحسب v_n بدلالة n :

نعلم أنّ : $v_n = v_0 \times q^n$ ، أي : $v_n = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^n$ ،

و منه : $v_n = (\frac{1}{2})^{n+1}$.

و لدينا : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ، أي : $u_{n+1} = v_n \times u_n$ ،

و منه : $u_{n+1} = (\frac{1}{2})^{n+1} \times u_n$ ، و هو المطلوب .

3) لدينا : $u_{n+1} = (\frac{1}{2})^{n+1} \times u_n$ ، أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (\frac{1}{2})^{n+1}$

إذن : $\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = (\frac{1}{2})^1 \\ \frac{u_2}{u_1} = (\frac{1}{2})^2 \\ \frac{u_3}{u_2} = (\frac{1}{2})^3 \\ \vdots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} = (\frac{1}{2})^n \end{cases}$ بالضرب نجد :

$$\frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \ldots\ldots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} = (\frac{1}{2})^{1+2+3+\ldots\ldots+n} \text{ ،}$$

أي : $\frac{u_n}{u_0} = (\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ، بما أنّ : $u_0 = 1$ ، فسيكون :

$u_n = (\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ، و هو المطلوب .

4) إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ، ثمّ تحديد نهايتها :

بما أنّ : $-1 < \frac{1}{2} < 1$ ، فإنّ : $\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$.

و بما أنّ : $\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$ ،

فإنّ : $\lim_{n \to +\infty} \left[(\frac{1}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] = 0$.

إذن : المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 .

حلول التمارين الخاصة بشعبتي الرياضي و التقني رياضي

حل التمرين العاشر :

لدينا : $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ ، مع $n \in \mathbb{N}^*$.

1) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) لنبيّن أنّ : $\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

أي : $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2}\right] = \frac{1}{2}$ ، لأنّ :

$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. و هو المطلوب .

ب) لنبيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون : $v_n > \frac{1}{2}$.

بما أنّ : $v_n = \frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2}$ و نعلم أنّ : $\frac{(n+1)^2}{n^2} > 1$

أي : $\frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2} > \frac{1}{2}$ ، و منه : $v_n > \frac{1}{2}$.

ج) تعيين p ، بحيث يكون : $v_n < \frac{3}{4}$.

لدينا : $v_n < \frac{3}{4}$ ، أي : $\frac{1}{2} \times \frac{(n+1)^2}{n^2} < \frac{3}{4}$ ، و هذا

يتحقق إذا كان : $\frac{(n+1)^2}{n^2} < \frac{3}{2}$ ، أي : $2(n+1)^2 < 3n^2$

أي: $2(n^2+2n+1) < 3n^2$ ، أي: $-n^2+4n+2<0$

*) لندرس إشارة $-x^2+4x+2<0$ على $\mathbb{R}$:

بعد دراسة الإشارة نلاحظ أنّه :

يكون : $-n^2+4n+2<0$ إذا كان : $n > 2+\sqrt{6}$ ،

أي : $n > 4,44$ ، و منه : $n \geq 5$.

إذن : أصغر قيمة لـ n كي يكون $v_n < \frac{3}{4}$ هي : 5 .

أي أنّ : $p = 5$.

د) إذا كان : $p \geq 5$ أي : $n \geq 5$ فإنّ : $v_n < \frac{3}{4}$ ،

أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{3}{4}$ ، و منه : $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$.

2) لدينا : $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$.

أ) لنبرهن بالتراجع من أجل $n \geq 5$: $u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$

*) لنتحقق من أجل $n = 5$ ، أي : $u_5 \leq (\frac{3}{4})^{5-5} \times u_5$

أي : $u_5 \leq (\frac{3}{4})^0 \times u_5$ ، و منه : $u_5 \leq u_5$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$ ، و لنثبت أنّ :

$u_{n+1} \leq (\frac{3}{4})^{n-4} \times u_5$.

لدينا: $u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$ ، أي: $\frac{3}{4} u_n \leq \frac{3}{4} \times (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$

أي : $\frac{3}{4} u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-4} \times u_5$ ، و نعلم أنّ : $u_{n+1} < \frac{3}{4} u_n$

إذن : $u_{n+1} \leq (\frac{3}{4})^{n-4} \times u_5$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل $n \geq 5$ يكون : $u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5$

ب) لدينا : $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$ ، و حسب

السؤال (أ) يصبح :
$$\begin{cases} u_5 \leq (\frac{3}{4})^{5-5} \times u_5 \\ u_6 \leq (\frac{3}{4})^{6-5} \times u_5 \\ u_7 \leq (\frac{3}{4})^{7-5} \times u_5 \\ \vdots \\ u_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} \times u_5 \end{cases}$$
 بالجمع نجد :

$S_n \leq \left[(\frac{3}{4})^0 + (\frac{3}{4})^1 + (\frac{3}{4})^2 + ... + (\frac{3}{4})^{n-5}\right] \times u_5$ ،

و منه : $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + ... + (\frac{3}{4})^{n-5}\right] \times u_5$ ،

و هو المطلوب .

ج) أولا لنحسب المجموع : $\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]$

نلاحظ أنّ المجموع لمتتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ و حدها الأول هو 1 ، و عدد حدودها هو : $n-4$ ، أي :

$$\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]=1\times\frac{1-(\frac{3}{4})^{n-4}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]$$

نعلم أنّ : $1-(\frac{3}{4})^{n-4}<1$ أي : $4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]<4$ ،

و منه : $4\times\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]u_5<4u_5$.

نعلم أنّ : $S_n\le\left[1+\frac{3}{4}+(\frac{3}{4})^2+....+(\frac{3}{4})^{n-5}\right]\times u_5$

أي : $S_n\le 4\left[1-(\frac{3}{4})^{n-4}\right]\times u_5$ ،

إذن : $S_n\le 4u_5$ ، و هو المطلوب .

3) لنبيّن أنّ المتتالية (S_n) متزايدة :

$$S_{n+1}-S_n=(u_5+u_6+...+u_n)-(u_5+u_6+...+u_{n+1})$$

و منه : $S_{n+1}-S_n=u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$.

نلاحظ أنّ : $S_{n+1}-S_n>0$ ، إذن : المتتالية (S_n) متزايدة من أجل كل $n\ge5$.

*) المتتالية (S_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ $4u_5$

إذن : فستكون متقاربة .

حل التمرين الحادي عشر :

لدينا : $u_0=0$ ، $u_1=1$ و $u_{n+1}=7u_n+8u_{n-1}$

1) لدينا : $s_n=u_{n+1}+u_n$.

أ) لنبيّن أنّ المتتالية (s_n) هندسية :

$$s_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=7u_{n+1}+8u_n+u_{n+1}$$
$$=8u_{n+1}+8u_n=8(u_{n+1}+u_n)$$

و منه : $s_{n+1}=8s_n$ ، إذن المتتالية (s_n) هندسية ، أساسها 8 ، و حدها الأول : $s_0=u_1+u_0=1$.

ب) عبارة s_n بدلالة n :

$s_n=s_0\times q^n$ ، و منه : $s_n=8^n$.

2) لدينا : $v_n=(-1)^n\times u_n$ و $t_n=v_{n+1}-v_n$

*) التعبير عن t_n بدلالة s_n :

$$t_n=v_{n+1}-v_n=(-1)^{n+1}\times u_{n+1}-(-1)^n\times u_n$$
$$=(-1)^n\left[-1\times u_{n+1}-u_n\right]=(-1)^n\times(-u_{n+1}-u_n)$$
$$=-(-1)^n\times s_n=-(-1)^n\times 8^n$$

و منه : $t_n=-(-8^n)$.

3) لنحسب المجموع : $t_0+t_1+...+t_{n-1}$ بطريقتين :

الطريقة الأولى :

$$=-(-8)^0+(-(-8)^1)+...+(-(-8)^{n-1})$$
$$=-\left[1+(-8)+(-8)^2+...+(-8)^{n-1}\right]$$

نلاحظ أنّ المجموع لمتتالية هندسية أساسها (-8) و حدها الأول هو : 1 ، و عدد حدودها هو : n حد .

$$t_0+t_1+...+t_{n-1}=-\frac{(-8)^n-1}{-8-1}=-\frac{(-8)^n-1}{-9}$$

و منه : $t_0+t_1+...+t_{n-1}=\frac{(-8)^n-1}{9}$.

الطريقة الثانية :

لدينا : $t_n=v_{n+1}-v_n$ ، أي :

$$\begin{cases} t_0=v_1-v_0 \\ t_1=t_2-v_1 \\ t_2=v_3-v_2 \\ \vdots \\ t_{n-1}=v_n-v_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع نجد : $t_0+t_1+...+t_{n-1}=v_n-v_0$

و بما أنّ : $v_0=(-1)^0\times u_0=0$ ، فسيكون :

$v_n=\frac{(-8)^n-1}{9}$.

*) كتابة u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=(-1)^n\times u_n$ ، أي :

. $u_n = \dfrac{v_n}{(-1)^n} = \dfrac{\dfrac{(-8)^n - 1}{9}}{(-1)^n}$

و منه : $u_n = \dfrac{(-8)^n - 1}{9\times(-1)^n}$.

*) حساب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{u_n}{8^n})$.

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{u_n}{8^n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(-8)^n-1}{9\times(-1)^n}}{8^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-8)^n-1}{9\times(-1)^n(8)^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(-8)^n-1}{9\times(-8)^n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{9\times(-8)^n}\right]$$

و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{u_n}{8^n}) = \dfrac{1}{9}$ ، لأنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{9\times(-8)^n}\right] = 0$.

حل التمرين الثاني عشر :

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$.

1) حساب الحدود :

*) $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)}$

نعلم أنّ : $1+\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ ، أي :

. $u_1 = \sqrt{2\times 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$

*) $u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\dfrac{\theta}{2}} = \sqrt{2(1+\cos\dfrac{\theta}{2})}$

$= \sqrt{2\times 2\cos^2\dfrac{\theta}{4}} = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{4}} = 2\cos\dfrac{\theta}{4}$

*) $u_3 = \sqrt{2+u_2} = \sqrt{2+2\cos\dfrac{\theta}{4}} = \sqrt{2(1+\cos\dfrac{\theta}{4})}$

$= \sqrt{2\times 2\cos^2\dfrac{\theta}{8}} = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{8}} = 2\cos\dfrac{\theta}{8}$

2) لنبرهن بالتراجع على أنّ : $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$.

*) لنتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $u_0 = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^0})$

و منه : $u_0 = 2\cos(\theta)$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$ ، و لنثبت أنّ :

. $u_{n+1} = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^{n+1}})$

لدينا : $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ و أيضا : $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$

أي : $u_{n+1} = \sqrt{2+2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})} = \sqrt{2(1+\cos(\dfrac{\theta}{2^n}))}$

$= \sqrt{2\times 2\cos^2(\dfrac{\theta}{2^n}\times\dfrac{1}{2})} = \sqrt{4\cos^2(\dfrac{\theta}{2^{n+1}})}$

و منه : $u_{n+1} = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^{n+1}})$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون: $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$

3) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_n = 2\cos(\dfrac{\theta}{2^n})$ ، و نعلم أنّ :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{\theta}{2^n}) = 0$ و $\lim\limits_{n\to 0}\cos(n) = 1$ ،

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

حل التمرين الثالث عشر :

لدينا : $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$.

1) البرهان : لدينا $u_{n+1} \le 0,95u_n$ معناه أنّ :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le 0,95$ لأنّ : $(u_n > 0)$ وَ $(u_{n+1} > 0)$ ،

أي : $\dfrac{\dfrac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^{10}}{2^n}} \le 0,95$ أي : $\dfrac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\times\dfrac{2^n}{n^{10}} \le 0,95$

أي : $(1+\dfrac{1}{n})^{10}\times\dfrac{1}{2} \le 0,95$ ، ومنه : $(1+\dfrac{1}{n})^{10} \le 1,9$

2) f الدالة المعرّفة على $[1;+\infty[$ بـ : $f(x) = (1+\dfrac{1}{x})^{10}$

أ) **إتجاه التغيّر** : $f'(x)=10\times(1+\frac{1}{x})^{9}\times(-\frac{1}{x^{2}})$ ،

نلاحظ أنّ : $f'(x)<0$ على $[1;+\infty[$ ،

و منه الدالة f متناقصة .

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	1024 $\searrow$ 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

ب) الدالة f مستمرة و رتيبة على $[1;+\infty[$ ،

وَ صورة المجال $[1;+\infty[$ هي $]1;1024]$ ،

وَ $1,9\in\,]1;1024]$ ، ومنه المعادلة $f(\alpha)=1,9$ تقبل

حلا وحيدا α ، حيث : $\alpha\in[1;+\infty[$.

ج) بالحاسبة نجد : $15<\alpha<16$ ، أي : $(n_0=16)$.

د) **البرهان** : من أجل $n\geq 16$ يكون : $f(n)\leq f(16)$

(لأنّ الدالة f متناقصة) ، أي : $(1+\frac{1}{n})^{10}\leq f(16)$

و لدينا : $f(16)<1,9$ ، و منه : $(1+\frac{1}{n})^{10}\leq 1,9$.

3) أ) من أجل $n\geq 16$ لدينا: $(1+\frac{1}{n})^{10}\leq 1,9$ معناه

أنّ : $u_{n+1}\leq 0,95u_n$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 0,95<1$ ،

و منه فإنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

ب) بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة وَ محدودة من الأسفل

بـ 0 لأنّ : $(u_n>0)$ ، ومنه فإنها **متقاربة** .

4) إثبات أنّ : $0\leq u_n\leq (0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ،

من أجل $n\geq 16$: (نستعمل البرهان بالتراجع) .

✓ تحقّق من أجل $n=16$:

$0\leq u_{16}\leq (0,95)^{16-16}\times u_{16}$ ، ومنه :

$0\leq u_{16}\leq u_{16}$ ، **محقّقة** .

✓ نفرض صحة : $0\leq u_n\leq (0,95)^{n-16}\times u_{16}$.

✓ و نثبت صحة : $0\leq u_{n+1}\leq (0,95)^{n+1-16}\times u_{16}$

أي : $0\leq u_{n+1}\leq (0,95)^{n-15}\times u_{16}$.

البرهان : لدينا فرضا : $0\leq u_n\leq (0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ،

أي : $0\leq 0,95\times u_n\leq 0,95\times(0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ،

أي: $0\leq 0,95u_n\leq (0,95)^{n-15}\times u_{16}$ ،

وَ لدينا : $u_{n+1}\leq 0,95u_n$ ،

ومنه : $0\leq u_{n+1}\leq (0,95)^{n-15}\times u_{16}$.

إذن من أجل كل $n\geq 16$: $0\leq u_n\leq (0,95)^{n-16}\times u_{16}$

❖ إستنتاج نهاية (u_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$ ،

لأنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,95)^{n-16}=0$

(حسب خاصية النهايات بالحصر) .

حل التمرين الرابع عشر :

الجزء الأوّل :

لدينا : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}$.

1) أ) التحقق من أنّ : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$.

$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{\frac{1+e^{x}}{e^{x}}}=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}=\frac{e^{x}+1-1}{e^{x}+1}$ ،

و منه : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$ ، و هو المطلوب .

ب) إستنتاج أنّ الدالة f فردية :

*) D_f متناظرة بالنسبة إلى 0 .

$f(-x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{-x}+1}=1+\frac{1}{2}x-2(\frac{1}{e^{-x}+1})$

$=1+\frac{1}{2}x-2(1-\frac{1}{e^{x}+1})=-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{e^{x}+1}$

أي : $f(-x)=-(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1})$ ،

و منه : $f(-x)=-f(x)$.

إذن : الدالة f فردية .

2) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$:

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{2}x = -\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$.

*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2}x = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 2$.

3) أ) لنحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}\right]$$

و منه : $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ، و هو المطلوب .

ب) بما أنّ : $f'(x) < 0$ فإنّ الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ، و جدول تغيّراتها يكون كما يلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$

ج) الإستنتاج :

لدينا من أجل كل $x \geq 0$ الدالة f متناقصة ، أي :

$f(x) \leq f(0)$ ، أي : $1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{e^x+1} \leq 0$ ،

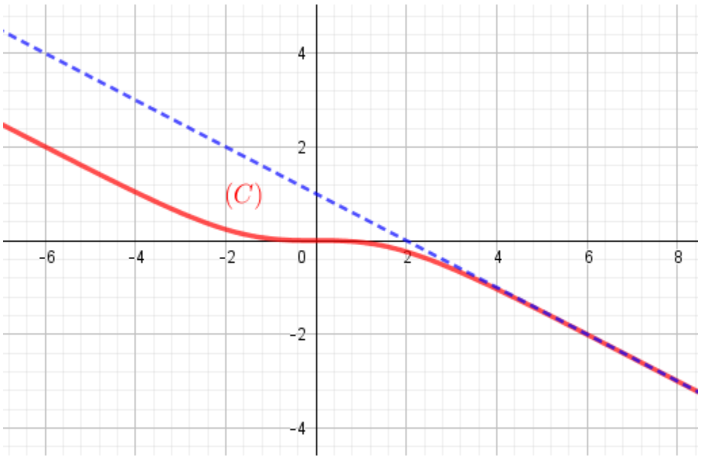
و منه : $1 - \dfrac{2}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{2}x$ ، و هو المطلوب .

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (1 - \dfrac{1}{2}x)\right] = 0$ ، لأنّ :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{e^x+1}\right) = 0$.

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

5) الإنشاء :



الجزء الثاني :

لدينا : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{e^{u_n}+1}$.

1) لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $1 > 0$ ، و منه :

$u_0 > 0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n > 0$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1} > 0$.

لدينا : $u_n > 0$ ، أي : $e^{u_n} > e^0$ ، أي : $e^{u_n} > 1$ ،

أي : $e^{u_n} + 1 > 2$ ، أي : $\dfrac{1}{e^{u_n}+1} < \dfrac{1}{2}$ ، أي :

$\dfrac{2}{e^{u_n}+1} < 1$ ، أي : $-\dfrac{2}{e^{u_n}+1} > -1$ ، و منه :

$1 - \dfrac{2}{e^{u_n}+1} > 0$ ، إذن : $u_{n+1} > 0$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n > 0$.

2) لدينا من أجل كل $x \geq 0$: $1 - \dfrac{2}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{2}x$ ،

بوضع : $x = u_n$ حيث : $u_n > 0$ ، فنتحصّل على :

$1 - \dfrac{2}{e^{u_n}+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$ ، و منه : $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.

*) إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا مما سبق أنّ : $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$ ، أي :

$u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{1}{2}u_n - u_n$ ، و منه :

$u_{n+1}-u_n \le -\frac{1}{2}u_n$ ، و بما أنّ : $u_n>0$ فإنّ :

$u_{n+1}-u_n<0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

3) لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n \le (\frac{1}{2})^n$

*) لنتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $1\le(\frac{1}{2})^0$ ، أي :

$1\le(\frac{1}{2})^0$ ، و منه : $u_0\le(\frac{1}{2})^0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n\le(\frac{1}{2})^n$ و لنثبت أنّ : $u_{n+1}\le(\frac{1}{2})^{n+1}$

لدينا : $u_n\le(\frac{1}{2})^n$ ، أي : $\frac{1}{2}u_n\le(\frac{1}{2})^{n+1}$ ، و بما أنّ :

$u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$ ، إذن : $u_{n+1}\le(\frac{1}{2})^{n+1}$ ، و هو المطلوب .

*) و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $u_n\le(\frac{1}{2})^n$.

*) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

بما أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n=0$ ، فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

(حسب مبرهنة النهايات بالحصر) .

حل التمرين الخامس عشر :

لدينا : $u_0=0$ و $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$.

1)أ)لنبرهن بالتراجع على أنّ : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$. $(n\in\mathbb{N}^*)$

*) لنتحقق من أجل $n=1$ ، أي : $u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_0}$

أي : $u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، إذن : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_1\le1$ (محققة) .

*) نفرض أنّ : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$ و لنثبت : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_{n+1}\le1$

لدينا : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$ ، أي : $1+\frac{\sqrt{2}}{2}\le1+u_n\le2$

أي : $\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\le\sqrt{1+u_n}\le\sqrt{2}$ ، أي :

$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{1+u_n}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}$ ،

إذن : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_{n+1}\le1$ ، و هو المطلوب .

*)و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$.

ب) دراسة إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}-u_n$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}-u_n\times\left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}\right]$$

$$=\frac{\frac{2}{4}(1+u_n)-u_n^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}=\frac{-u_n^2+\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}+u_n}$$

*) بما أنّ : $1\le u_n\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن إشارة الفرق من إشارة

$-u_n^2+\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}$.

*) لندرس على $\mathbb{R}$ إشارة : $-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

نتحصّل على أنّ : على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ يكون :

$-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ge0$ و بما أنّ : $\frac{\sqrt{2}}{2}\le u_n\le1$ ،

فإنّ : $-u_n^2+\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}\ge0$ ، أي : $u_{n+1}-u_n\ge0$

و منه فإنّ : المتتالية (u_n) متزايدة .

*) بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 1

فهي متقاربة .

ج) تعيين l نهاية المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) متقاربة ، أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=l$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$ ، أي :

$l=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+l}$ ، بما أنّ : $l\ge0$ فسيكون :

أي : $l^2 = \frac{2}{4}(1+l)$ ، أي : $l^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}l$ ، أي :

$l^2 - \frac{1}{2}l - \frac{1}{2} = 0$ ، و منه : $l = -\frac{1}{2}$ (مرفوض) ،

أو $l = 1$ (مقبول) ، إذن : النهاية l تساوي 1 .

2) أ) لنبيّن أنّ : $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2})$ مع $x \in [0;\pi]$

نعلم أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x \in [0;\pi]$ ، يكون :

$1+\cos x = 2\cos^2(\frac{x}{2})$ ، أي : $\frac{1+\cos x}{2} = \cos^2(\frac{x}{2})$ ،

أي : $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\cos^2(\frac{x}{2})}$ ، أي أنّ :

$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \left|\cos(\frac{x}{2})\right|$. (بما أنّ : $0 \leq x \leq \pi$ ، أي :

$0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ ، و منه : $\cos(\frac{x}{2}) \geq 0$.

إذن : من أجل $x \in [0;\pi]$ يكون : $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2})$

ب) لنبرهن بالتراجع على أنّ : $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $u_0 = \cos(\frac{\pi}{2})$ ،

و منه : $u_0 = 0$ (محققة) .

*) لنفرض أنّ : $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ و لنثبت أنّ :

$u_{n+1} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$.

لدينا : $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+u_n}$ و $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ ،

أي : $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}$ ، $(\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}})$

أي : $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}$ ، أي :

$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}{2}}$ ، و بما أنّ :

$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2})$ ، فإنّ : $u_{n+1} = \cos(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2})$ ،

أي : $u_{n+1} = \cos(\frac{\pi}{2\times 2^{n+1}})$ ، و منه : $u_{n+1} = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$

إذن : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $u_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$.

ج) إيجاد ثانية نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أنّ : $\lim_{n\to+\infty}(\frac{\pi}{2^{n+1}}) = 0$ و $\lim_{n\to 0}\cos(n) = 1$ ،

و منه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2019

دعواتكم الخالصة لنا بالصحة و العافية

الأستاذ : ب.ع

حفارات تدريبية في المتتاليات لباك 2019

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} .$$

1) أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $u_n = \frac{n}{n+1}$.

ب) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

2) نريد إيجاد عبارة u_n بكيفية ثانية .

أ) عيّن العددين الحقيقيين a وَ b بحيث يكون :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} .$$

ب) إستنتج أنّ : $u_n = \frac{n}{n+1}$.

3) نعرّف من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \ln u_n$.

أ) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .

ب) ما هي نهاية المتتالية (v_n) ؟ .

ج) أحسب المجموع S حيث :

$$S = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_{2019} .$$

التمرين الثاني :

فيما يلي أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل مرة :

1) المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_n = 4 + 2 + 1 + 0,5 + 0.25 + ...$ متقاربة نحو 8 .

2) نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) و التي أساسها 11 ، كما أنّ :

$u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 305$.

أ) $u_5 = 60$.

ب) 2019 هو حد من حدود هذه المتتالية .

3) نعتبر (u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ حدودها غير معدومة و المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

أ) إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ المتتالية (v_n) متقاربة أيضا .

ب) إذا كانت المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بـ 2 فإنّ المتتالية (v_n) محدودة من الأسفل بـ -1 .

ج) إذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة فإنّ المتتالية (v_n) متناقصة أيضا .

د) إذا كانت المتتالية (u_n) متباعدة فإنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 .

4) نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \frac{6}{1+5e^{-n}}$

أ) المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

ب) المتتالية (u_n) متقاربة نحو 6 .

ج) إبتداءا من $n = 8$ يكون : $u_n > 5,999$.

5) نعتبر (u_n) متتالية هندسية حدها الأوّل $u_1 = 2$ و أساسها $q = \frac{1}{3}$. نضع من أجل كل $n \geq 1$: $v_n = \ln u_n$

أ) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون : $u_n = \frac{2}{3^{n+1}}$.

ب) المتتالية (v_n) حسابية أساسها هو : $r = -\ln 3$.

ج) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون :

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 3\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] .$$

د) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون :

$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n = n\ln 2 - \frac{n(n-1)}{2}\ln 3 .$$

ه) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون :

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times .... \times u_n = \frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}} .$$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3 + 2}{(u_n)^2 + 1} \end{cases}$

1) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :
$0 < u_n < 2$.

2) أدرس رتابة المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقـاربة .
مـاهي نهايتها عندئذ ؟ .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :
$$2 - u_{n+1} \le \frac{4}{5}(2 - u_n) .$$

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :
$0 \le 2 - u_n \le (\frac{4}{5})^n$ ثمّ استنتج نهاية (u_n) من جديد .

4) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون :
$$S_n \ge 2n - 3 + 5(\frac{4}{5})^{n+1} .$$

ب) أحسب نهاية S_n .

التمرين الرابع :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول u_0 ،
نضع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

1) عيّن كل من u_0 وَ r إذا علمت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $S_n = 4n^2 + 8n + 4$.

2) عيّن قيمة n التي من أجلها يكون : $S_n = 400$.

التمرين الخامس :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بــ : $u_1 = \frac{1}{3}$
و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :
$$u_{n+1} = \frac{n + 3 + 2n \times u_n}{3n + 3} .$$

1) أحسب الحد u_2 .

2) نضع من أجل كل $n \ge 1$: $v_n = n(1 - u_n)$.
- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1 .

3) أكتب عبارة كل من u_n وَ v_n بدلالة n .

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :
$S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n$.

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2019

الأستاذ : ب.ع

تمارين في الدوال و المتتاليات للتحضير الجيد لبكالوريا 2019

التمرين الأول :

1) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f_n(x)=\ln x+\frac{x}{n}-1$.

أ) عين نهايات الدالة f_n عند 0 و $+\infty$ ، ثم ادرس اتجاه تغير f_n .

ب) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n ينتمي إلى المجال $[1;e]$.

2) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Γ) هو المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto \ln x$.

أ) n عدد طبيعي غير معدوم . أكتب معادلة للمستقيم (Δ_n) المار بالنقطتين $A(0;1)$ و $B(n;0)$.

ب) أنشئ المنحنى (Γ) و المستقيمات (Δ_1)، (Δ_2)، (Δ_3) .

جـ) بين أن α_n هو فاصلة نقطة تقاطع (Γ) مع (Δ_n) .

د) حدد قيمة α_1 ، ثم أعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (α_n) .

3) أ) عبر عن $\ln(\alpha_n)$ بدلالة n و α_n .

ب) عبر عن $f_{n+1}(\alpha_n)$ بدلالة n وَ α_n و تحقق أنّ : $f_{n+1}(\alpha_n)<0$.

جـ) إستنتج اتجاه تغير المتتالية (α_n) .

د) بين أنّ المتتالية (α_n) متقاربة ، أحسب نهايتها l عندئذ .

التمرين الثاني :

1) نعتبر الدالة f_1 المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f_1(x)=2x-2+\ln(x^2+1)$.

أ) عين نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$.

ب) عين مشتقة الدالة f_1 ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_1 .

2) n عدد طبيعي غير معدوم ، لتكن الدالة f_n المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f_n(x)=2x-2+\frac{\ln(x^2+1)}{n}$.

أ) عين نهاية الدالة f_n عند $+\infty$.

ب) بين أن الدالة f_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

جـ) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n عل $[0;+\infty[$.

د) برر أنه من أجل كل طبيعي n غير معدوم : $0<\alpha_n<1$.

3) بين أنه من أجل كل طبيعي n غير معدوم : $f_n(\alpha_{n+1})>0$.

4) أ) بين أن المتتالية (α_n) متزايدة .

ب) إستنتج أنها متقاربة .

جـ) إستعمل العبارة : $\alpha_n=1-\frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$. لتعيين نهاية المتتالية (α_n) .

التمرين الثالث :

من أجل كل عدد طبيعي n نعرف على المجال $\left]0;+\infty\right[$ الدالة f_n كما يلي : $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\ln x$

الجزء الأول : (دراسة حالة $n=0$)

f_0 هي الدالة المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ بـ : $f_0(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

1) أحسب نهاية الدالة f_0 عند 0 و عند $+\infty$.

2) أ) تحقق أن : $f_0'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$.

ب) نضع من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$: $u(x)=e^x(x-1)+1$.

✓ أدرس إتجاه تغير الدالة u ، ثم أكتب جدول تغيراتها .

ج) إستنتج إشارة $u(x)$ على $\left]0;+\infty\right[$ ، و شكل جدول تغيرات الدالة f_0 .

د) أرسم المنحني (C_0) الممثل للدالة f_0 في معلم متعامد و متجانس وحدته $2cm$ ، و عين النقطة $A(0;1)$.

الجزء الثاني :

1) عين إتجاه تغير الدالة f_n على $\left]0;+\infty\right[$.

2) عين نهايات الدالة f_n عند 0 و $+\infty$.

3) أدرس وضعية المنحني (C_{n+1}) بالنسبة إلى (C_n) .

4) بين أن كل المنحنيات (C_n) تشمل نقطة ثابتة B يطلب تحديد إحداثياها .

5) أ) بين أنه يوجد عدد وحيد α_1 ينتمي إلى المجال $[0,2;0,9]$ حيث : $f_1(\alpha_1)=0$.

ب) بين أن : $f_n(\alpha_1)<0$ من أجل كل عدد طبيعي $n>1$.

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n>1$: المعادلة $f_n(\alpha_n)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n ينتمي إلى المجال $[\alpha_1;1]$.

6) أ) باستعمال الجزء الأول بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1]$: $\dfrac{e^x-1}{x}\leq e-1$.

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\ln(\alpha_n)=\dfrac{1-e}{n}$ ، ثم أن : $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

ج) عين نهاية المتتالية (α_n) .

7) أنشئ في المعلم السابق كلا من : (C_1) و (C_2) .

التمرين الرابع :

من أجل كل عدد طبيعي n نعرف على $\mathbb{R}$ الدالة f_n كما يلي : $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ ، (C_n) هو المنحني الممثل للدالة f_n في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تمر بنقطة ثابتة A يطلب تحديد إحداثياها .

2) أ) أدرس تغيرات الدالة f_0 .

ب) عين نهايات الدالة f_0 عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم فسر النتائج هندسيا .

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f_0 على $\mathbb{R}$.

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_0(x) = f_1(-x)$.

ب) إستنتج نهايات الدالة f_1 عند $-\infty$ و $+\infty$ ، و أيضا إتجاه تغيرها .

ج) أعط التفسير الهندسي للنتيجة المحصل عليها في السؤال (3) أ) الخاصة بالمنحنيين (C_0) و (C_1) .

4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$.

ب) إستنتج نهايات الدالة f_n عند $-\infty$ و $+\infty$.

ج) أحسب $f_n'(x)$ مشتقة الدالة f_n ، ثم شكل جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.

التمرين الخامس :

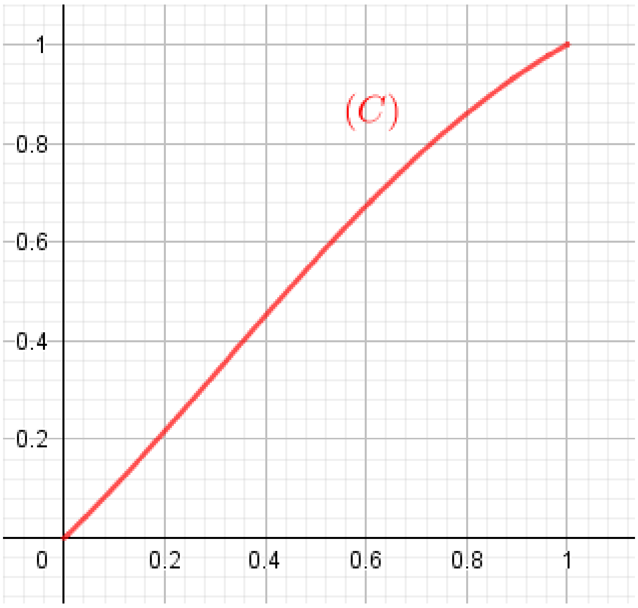
I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x) = e^x - x - 1$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g .

2) عيّن إشارة $g(x)$ من أجل كل $x \in [0;+\infty[$.

3) إستنتج مما سبق أنّ : أ) من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ يكون : $e^x - x > 0$.

ب) من أجل كل $x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$ يكون : $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{e^x - x} \leq \dfrac{9}{10}$.



II) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;1]$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

(C) هو منحناها كما هو مبيّن في الشكل المقابل .

1) أ) بيّن أنّ : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - x)^2}$ ، حيث h دالة يطلب تعيينها .

ب) أدرس تغيّرات الدالة h على $[0;1]$ ، ثمّ استنتج تغيّرات الدالة f على $[0;1]$.

ج) بيّن أنّه من أجل كل $x \in [0;1]$ ، $f(x) \in [0;1]$.

2) (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

أ) برهن أنّه من أجل كل x من $[0;1]$: $f(x) - x = \dfrac{(1-x) \times g(x)}{e^x - x}$.

ب) إستنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ) على $[0;1]$.

III) نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) أ) أنشئ (Δ) في الشكل أعلاه ، ثمّ عيّن على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .

ب) أعط تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n) .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n) ؟ .

3) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 \leq \left(\dfrac{9}{10}\right)^n (u_0 - 1)$. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ .

التمرين السادس :

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x-\frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$ ، (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ وحدته : $(3cm)$.

الجزء الأوّل :

1) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ وَ $+\infty$.

2) أ) أحسب كلا من $f'(x)$ وَ $f''(x)$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f' .

ج) بيّن أنّ المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقّق أنّ : $-1{,}3<\alpha<-1{,}2$.

3) أ) إستنتج من السؤال السابق تغيّرات الدالة f ، وَ شكل جدول تغيّراتها .

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$.

أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

ج) أنشئ كلا من (Δ) وَ (C) .

الجزء الثّاني :

نعرّف المتتالية (u_n) بـ : $u_0=0$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) أ) مثّل على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 في المعلم السابق .

ب) أعط تخمينا حول إتجاه و تقارب المتتالية (u_n) .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1<u_n<0$.

3) أ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

ب) إستنتج أنّ المتتالية (u_n) تقبل نهاية l .

4) أ) برهن أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0<u_{n+1}+1<\frac{3}{4}(u_n+1)$.

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n+1<(\frac{3}{4})^n$.

ج) ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟ .

كتابة الأستاذ : ب.ع

الإجابة النموذجية

حل التمرين الأول:

1) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f_n(x) = \ln x + \dfrac{x}{n} - 1$.

أ) تعيين نهايات الدالة f_n عند 0 و $+\infty$ ، ثم دراسة إتجاه تغيرها :

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_n(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

✓ الدالة f_n قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $f_n{}'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{n}$ ، لدينا من أجل كل عدد طبيعي n و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{n} > 0$ ، ومنه الدالة f_n متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

✓ جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f_n{}'(x)$	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

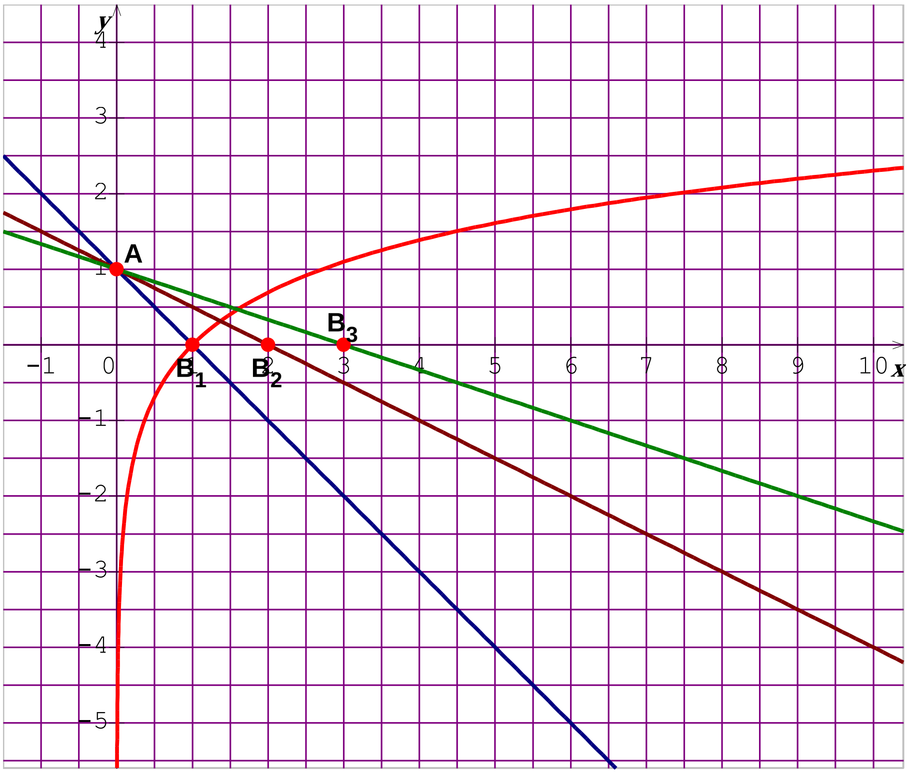
ب) بيان أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حل وحيد α_n على المجال $[1;e]$

الدالة f_n مستمرة و رتيبة على المجال $]0;+\infty[$ إذن هي مستمرة على المجال $[1;e]$ ، و بما أن: $f_n(1) = \dfrac{1}{n} - 1$ و $f_n(e) = \dfrac{e}{n}$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n حيث: $1 \le \alpha_n \le e$.

2) أ) كتابة معادلة المستقيم (Δ_n) المار بالنقطتين $A(0;1)$ و $B(n;0)$:

لدينا: $(\Delta_n) : y = ax + b$ ، أي: $a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{0-1}{n-0} = -\dfrac{1}{n}$ ، ومنه $(\Delta_n) : y = -\dfrac{1}{n}x + b$ ، و بما أن $A(0;1) \in (\Delta_n)$ ، فإن: $1 = -\dfrac{1}{n}(0) + b$ ، أي: $b = 1$ ، وعليه: $(\Delta_n) : y = -\dfrac{1}{n}x + 1$.

ب) إنشاء المنحنى (Γ) و المستقيمات (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) :



ج) بيان أن α_n هو فاصلة نقطة تقاطع (Γ) مع (Δ_n) :

نحل المعادلة $\ln x = -\dfrac{1}{n}x + 1$ ، أي : $\ln x + \dfrac{x}{n} - 1 = 0$ ، ومنه: $f_n(x) = 0$ وهذه المعادلة تقبل حلا وحيدا α_n

إذن : (Γ) و (Δ_n) يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة α_n .

د) تحديد قيمة α_1 ، ثم إعطاء تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (α_n) :

α_1 هو حل للمعادلة $f_1(x) = 0$ ، أي : $\ln x + x - 1 = 0$ (يوجد حل ظاهر وهو 1) ، ومنه : $\alpha_1 = 1$.

✓ التخمين حول إتجاه تغير المتتالية (α_n) : من البيان نلاحظ أن المتتالية (α_n) متزايدة .

3) أ) التعبير عن $\ln(\alpha_n)$ بدلالة n و α_n :

نعلم أن α_n هو حل للمعادلة $f_n(x) = 0$ ، أي: $\ln(\alpha_n) + \dfrac{\alpha_n}{n} - 1 = 0$ ، ومنه : $\ln(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{n} + 1$.

ب) التعبير عن $f_{n+1}(\alpha_n)$ بدلالة بدلالة n و α_n و التحقق أن : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$:

✓ $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n) + \dfrac{\alpha_n}{n+1} - 1$ ، أي: $f_{n+1}(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{n} + 1 + \dfrac{\alpha_n}{n+1} - 1$ ، ومنه :

$f_{n+1}(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{n} + \dfrac{\alpha_n}{n+1}$ ، أي: $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n(-\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1})$ ومنه: $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n(\dfrac{-n-1+n}{n(n+1)})$

أي : $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n(\dfrac{-1}{n(n+1)})$ ، إذن : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ ، لأن : $1 \le \alpha_n \le e$ و $(\dfrac{-1}{n(n+1)}) < 0$.

ج) إستنتاج اتجاه تغير المتتالية (α_n) :

لدينا : $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ و نعلم أن الدالة f_{n+1} تنعدم عند α_{n+1} أي : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ إذن :

$f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ ، وبما أن الدالة f_n متزايدة على $]0;+\infty[$ فإن : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ ، ومنه المتتالية (α_n) متزايدة

د) بيان أن المتتالية (α_n) متقاربة . و حساب نهايتها l :

✓ بما أن المتتالية (α_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ e فهي متقاربة .(أي تقبل نهاية l) .

✓ حساب نهاية المتتالية (α_n) : نستعمل لذلك العبارة $\ln(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n} + 1$ ، نعلم أن : $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n) = l$

إذن : $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{\alpha_n}{n} + 1) = \lim_{n\to+\infty}\ln(\alpha_n)$ أي : $\lim_{n\to+\infty}\ln(\alpha_n) = 1$ (لأن : $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{\alpha_n}{n}) = 0$).

ومنه : $\ln l = 1$ ، إذن : $l = e$. $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n) = e$.

حل التمرين الثاني :

1) الدالة f_1 المعرفة على $\left[0;+\infty\right[$ بـ : $f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2+1)$:

أ) تعيين نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

ب) تعيين مشتقة f_1 ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f_1 :

✓ الدالة f_1 قابلة للإشتقاق على $\left[0;+\infty\right[$ و دالتها المشتقة هي : $f_1'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1}$ ، ومنه $f_1'(x) > 0$

من أجل كل عدد حقيقي من $\left[0;+\infty\right[$. إذن الدالة f_1 متزايدة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

✓ جدول التغيرات :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_1'(x)$	$+$
$f_1(x)$	$-2 \nearrow +\infty$

2) n عدد طبيعي غير معدوم ، الدالة f_n المعرفة على $\left[0;+\infty\right[$ بـ : $f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$:

أ) تعيين نهاية الدالة f_n عند $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

ب) بيان أن الدالة f_n متزايدة تماما على $\left[0;+\infty\right[$: $f_n'(x) = 2 + \frac{1}{n}\times\frac{2x}{x^2+1}$ ، نلاحظ: $f_n'(x) > 0$ ومنه

الدالة f_n متزايدة على المجال $\left[0;+\infty\right[$

جـ) بيان أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n على $\left[0;+\infty\right[$:

الدالة f_n مستمرة و رتيبة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ و صورة المجال $\left[0;+\infty\right[$ هي $\left[-2;+\infty\right[$ وبما أن : $0 \in \left[-2;+\infty\right[$

فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

د) تبرير أنه من أجل كل طبيعي n غير معدوم : $0 < \alpha_n < 1$:

بما أن : α_n هو حل للمعادلة $f_n(x) = 0$ فإنه يحقق : $\begin{cases} f_n(0) = -2 \\ f_n(1) = \frac{\ln 2}{n} \end{cases}$ أي : $f_n(0)\times f_n(1) < 0$ وعليه فإن :

$0 < \alpha_n < 1$.

3) بيان أنه من أجل كل طبيعي n غير معدوم : $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$:

نحسب $f_n(\alpha_{n+1})$: $f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n}$ ، نعلم أن : α_{n+1} هو حل للمعادلة $f_{n+1}(x) = 0$

أي : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ ، ومنه : $2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n+1} = 0$ ، أي : $2\alpha_{n+1} - 2 = -\dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n+1}$

نعوض الآن في عبارة $f_n(\alpha_{n+1})$ نجد: $f_n(\alpha_{n+1}) = -\dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n+1} + \dfrac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n}$ ، أي :

ومنه : $f_n(\alpha_{n+1}) = \ln(\alpha_{n+1}^2+1)\left[\dfrac{-1}{n+1} + \dfrac{1}{n}\right]$ ، أي : $f_n(\alpha_{n+1}) = \ln(\alpha_{n+1}^2+1)\left[\dfrac{-n+n+1}{n(n+1)}\right]$:

لدينا: $f_n(\alpha_{n+1}) = \ln(\alpha_{n+1}^2+1)(\dfrac{1}{n(n+1)})$ ، إذن : $\begin{cases} (\dfrac{1}{n(n+1)}) > 0 \\ \ln(\alpha_{n+1}^2+1) > 0 \end{cases}$ $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

4) أ) بيان أن المتتالية (α_n) متزايدة : لدينا $f_n(\alpha_n) = 0$ و بما أن : $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ فإن : $f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$.

وبما أن الدالة f_n متزايدة فإن : $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ ، و منه فإن المتتالية (α_n) متزايدة .

ب) إستنتاج أنها متقاربة : المتتالية (α_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 1 ، $(0 < \alpha_n < 1)$ إذن فهي متقاربة .

ج) تعيين نهاية المتتالية (α_n) : نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$ أي: $2\alpha_n - 2 + \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{n} = 0$ و منه :

أي : $2\alpha_n = 2 - \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{n}$ $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$. نستعمل هذه العبارة لتعيين نهاية المتتالية (α_n) :

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n} = 0$ ، إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n) = 1$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق